

BestMasters

Johanna Eckert

Kreditportfolio- modellierung

Abhängigkeiten zwischen
Ausfallwahrscheinlichkeit,
Verlustrate und Forderungshöhe



Springer Gabler

BestMasters

Mit „BestMasters“ zeichnet Springer die besten Masterarbeiten aus, die an renommierten Hochschulen in Deutschland, Österreich und der Schweiz entstanden sind. Die mit Höchstnote ausgezeichneten Arbeiten wurden durch Gutachter zur Veröffentlichung empfohlen und behandeln aktuelle Themen aus unterschiedlichen Fachgebieten der Naturwissenschaften, Psychologie, Technik und Wirtschaftswissenschaften.

Die Reihe wendet sich an Praktiker und Wissenschaftler gleichermaßen und soll insbesondere auch Nachwuchswissenschaftlern Orientierung geben.

Springer awards „BestMasters“ to the best master's theses which have been completed at renowned universities in Germany, Austria, and Switzerland.

The studies received highest marks and were recommended for publication by supervisors. They address current issues from various fields of research in natural sciences, psychology, technology, and economics.

The series addresses practitioners as well as scientists and, in particular, offers guidance for early stage researchers.

Johanna Eckert

Kreditportfolio- modellierung

Abhängigkeiten zwischen
Ausfallwahrscheinlichkeit, Verlustrate
und Forderungshöhe

Johanna Eckert
Nürnberg, Deutschland

BestMasters

ISBN 978-3-658-12113-6

ISBN 978-3-658-12114-3 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-658-12114-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Gabler

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2016

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Fachmedien Wiesbaden ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 2 | Risikoparameter Ausfall, Verlustrate und Forderungshöhe bei Ausfall | 5 |
| 2.1 | Die Forderungshöhe bei Ausfall | 8 |
| 2.2 | Die Verlustrate im Kontext von Verwertungserlös- und Einbringungsquote | 9 |
| 3 | Einführung in CreditMetrics™ | 13 |
| 4 | Empirische Befunde zur Verlustrate und Forderungshöhe bei Ausfall | 17 |
| 4.1 | Verlustrate und Ausfall | 17 |
| 4.2 | Forderungshöhe bei Ausfall und Ausfall | 21 |
| 5 | Modellierung der Abhängigkeiten zwischen den Risikoparametern mit Faktoren | 27 |
| 5.1 | Ein-Faktor-Modell | 28 |
| 5.2 | Mehr-Faktor-Modell | 33 |
| 5.3 | Schätzung | 37 |
| 5.3.1 | Heckman-Selektionsmodell | 38 |
| 5.3.2 | Schätzung des Mehr-Faktor-Modells | 41 |
| 5.4 | Kritik | 45 |
| 6 | Modellierung der Abhängigkeiten zwischen den Risikoparametern mit Copulae | 47 |
| 6.1 | Modellierung | 50 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 6.2 | Schätzung | 54 |
| 6.3 | Archimedische und hierarchisch-archimedische Copulae | 56 |
| 6.3.1 | Archimedische Copulae | 56 |
| 6.3.2 | Hierarchisch-archimedische Copulae | 60 |
| 7 | Relative Inanspruchnahme, Verwertungserlös- und Einbringungsquote | 65 |
| 7.1 | Verständnis der Risikoparameter | 65 |
| 7.2 | Mögliche Randverteilungen | 67 |
| 8 | Anwendung der Modelle auf Credit Metrics™ | 75 |
| 8.1 | Portfolio | 75 |
| 8.2 | Abhängigkeitsparameter der Modelle | 78 |
| 8.2.1 | Vorzeichen der Parameter | 78 |
| 8.2.2 | Werte der Parameter | 82 |
| 8.3 | Simulationsalgorithmen der verschiedenen Modelle | 88 |
| 8.4 | Numerische Analyse | 92 |
| 9 | Zusammenfassung | 99 |
| A | Appendix | 103 |
| A.1 | Bedingter Erwartungswert der beobachteten Teilstichprobe .. | 103 |
| A.2 | Form der bedingten Dichte | 104 |
| A.3 | Bedingte Likelihood-Funktion für den Zeitpunkt t im Copula-Modell | 109 |
| | Literaturverzeichnis | 113 |

Abbildungsverzeichnis

- 2.0.1 Portfolioverlustverteilung mit Risikokennzahlen 7
- 2.1.1 Forderungshöhe bei Ausfall im Zusammenhang
mit Kreditumrechnungsfaktor und Relative
Inanspruchnahme bei Ausfall 10
- 2.2.1 Schrittweise Bestimmung des Verlustes 11
- 6.3.1 Dichtefunktionen bivariater Verteilungen mit
 $N(0, 1)$ -Randverteilungen und entsprechenden Copulae .. 59
- 6.3.2 Möglichkeiten der Einbettung hierarchisch-
archimedischer Copulae 61
- 7.1.1 Histogramme der Potentiellen VEQ und der tatsächlich
realisierten Konventionellen VEQ..... 66
- 7.2.1 Dichtefunktionen der Beta-Verteilung..... 68
- 7.2.2 Dichtefunktionen der Kumaraswamy-Verteilung 69
- 7.2.3 Dichtefunktionen der Verallgemeinerten Kumaraswamy-
Verteilung 71
- 7.2.4 Dichtefunktionen der negativen log-Gamma-Verteilung ... 73
- 8.2.1 Vollständig eingebettete hierarchische Clayton-Copula
für $\epsilon_{it}^A, (\epsilon_{it}^B)^*, \epsilon_{it}^C, \epsilon_{it}^D$ 87
- 8.4.1 Dichtefunktionen der Gesamtverlustverteilungen der
jeweiligen Modelle 93
- 8.4.2 Sensitivitätsanalyse des Ökonomischen Kapitals
bezüglich des Gewichts des gemeinsamen
systematischen Faktors im Mehr-Faktor-Modell 97

| | | |
|-------|---|----|
| 8.4.3 | Sensitivitätsanalyse des Ökonomischen Kapitals bezüglich des Gewichts des gemeinsamen idiosynkratischen Faktors im Mehr-Faktor-Modell | 98 |
|-------|---|----|

Tabellenverzeichnis

| | | |
|-------|--|----|
| 4.2.1 | Relative Inanspruchnahme und Kreditumrechnungsfaktor, angelehnt an Asarnow and Marker [1995] | 22 |
| 5.1.1 | Treiber der einzelnen Risikoparameter im Ein-Faktor- Modell | 31 |
| 5.2.1 | Treiber der einzelnen Risikoparameter im Mehr-Faktor- Modell | 36 |
| 5.3.1 | Treiber der einzelnen Risikoparameter im Mehr-Faktor- Modell | 41 |
| 6.1.1 | Treiber der einzelnen Risikoparameter im Copula-Modell . | 51 |
| 7.2.1 | Negative log-Gamma-Verteilung | 72 |
| 8.1.1 | Ratingklassen | 75 |
| 8.2.1 | Ausprägungen der jeweiligen Risikotreiber unter guten Zeiten | 79 |
| 8.2.2 | Vorzeichen der Abhängigkeitsparameter | 81 |
| 8.2.3 | Idiosynkratische Faktoren der verschiedenen Risikotreiber | 85 |
| 8.2.4 | Korrelationen der idiosynkratische Faktoren in den Faktor-Modellen | 85 |
| 8.2.5 | Kendalls τ der Störterme in den Faktor-Modellen | 86 |
| 8.2.6 | Kendalls τ der Störterme im Copula-Modell | 87 |
| 8.4.1 | Risikokennzahlen der verschiedenen Modelle | 93 |
| 8.4.2 | Risikokennzahlen des Mehr-Faktor-Modells | 96 |

| | | |
|-------|--|----|
| 8.4.3 | Risikokennzahlen des Mehr-Faktor-Modells unter verschiedenen Szenarien idiosynkratischer Abhängigkeit . | 97 |
|-------|--|----|

Abkürzungsverzeichnis

| | |
|--------------|--|
| CCF | Kreditumrechnungsfaktor (Credit Conversion Factor) |
| EAD | Forderungshöhe bei Ausfall (Exposure at Default) |
| EBQ | Einbringungsquote |
| EC_α | Ökonomische Kapital (Economic Capital) zum Niveau α |
| EL | Erwarteter Verlust |
| ES_α | Expected Shortfall zum Niveau α |
| F | Ausfallereignis |
| L | (Portfolio-)Verlust |
| LGD | Verlustrate bei Ausfall (Loss given Default) |
| PD | Ausfallwahrscheinlichkeit (Probability of Default) |
| PL | Potentieller Verlust im Sinne der Erwartungswerte |
| RELI | Relative Inanspruchnahme bei Ausfall |
| RR | Erholungsrate bei Ausfall (Recovery Rate) |
| VaR_α | Value at Risk zum Niveau α |
| VEQ | Verwertungserlösquote |

1. Einleitung

Auf Konzernebene der BayernLB fielen im Jahr 2013 gemäß des Offenlegungsberichts zum 31. Dezember 2013 5.635 Mio. von 7.004 Mio. des Ökonomischen Kapitals auf das Kreditrisiko [BayernLB, 2014, S. 28]. Gemessen am Ökonomischen Kapital macht das Kreditrisiko somit 80% des Gesamtbankrisikokapitalbedarfs aus. Auch bei anderen Banken stellt das Kreditrisiko im Allgemeinen den bedeutendsten Anteil am Gesamtbankrisiko. Um die Verlustverteilung eines Kreditportfolios über einen festen Zeitraum zu bestimmen und deren Risikomaße abzuleiten, werden Kreditportfoliomodelle verwendet. Drei Hauptvariablen sind dabei für jede einzelne Position entscheidend: Die Ausfallwahrscheinlichkeit (Probability of Default PD), die Verlustrate bei Ausfall (Loss given Default LGD) sowie die Forderungshöhe bei Ausfall (Exposure at Default EAD). Die Literatur zum Thema Kreditportfoliomodelle hat lange Zeit der Ausfallwahrscheinlichkeit die Hauptaufmerksamkeit gewidmet. Dabei sind die anderen beiden Variablen Verlustrate und Forderungshöhe bei Ausfall sowohl im Einzelnen, als auch deren Beziehung untereinander und zur Ausfallwahrscheinlichkeit weitestgehend vernachlässigt worden. Ziel dieser Arbeit ist es, diese Lücke zu schließen und auch die letztgenannten Zufallsvariablen als stochastische Größen mit Abhängigkeitsbeziehungen untereinander aufzufassen. Dafür werden ausgehend von dem Portfoliomodell CreditMetrics™ von J.P. Morgan [Gupton et al., 1997] verschiedene Modellierungsansätze und die zugehörige Schätzmethode vorgestellt, um das Risiko eines Kreditportfolios unter einer ganzheitlichen Betrachtung der Risikogrößen zu quantifizieren.

Ein großer Teil der Literatur, die sich mit Abhängigkeiten zwischen den Risikoparametern in Kreditportfoliomodellen beschäftigt, beschränkt sich auf die Beziehung zwischen Ausfallwahrscheinlichkeit und Verlustrate (u.a. Hamilton et al. [2001], Altman et al. [2001], Frye [2000a], Frye [2000b], Jarrow [2001], Hu and Perraudin [2002], Pykhtin [2003], Tasche [2004], Altman et al. [2005], Miu and Ozdemir [2006], Witzany [2011], Bade et al. [2011]). Dabei wird klar, dass eine positive Korrelation zwischen Ausfallra-

ten und Verlustraten besteht. Pykhtin [2003] beschreibt ein Faktor-Modell für den Ausfall und die Verlustrate. Dieses erweitert vorangehende Ansätze in der Art, dass die Abhängigkeit zwischen Ausfall und Verlustrate nicht nur auf einem gemeinsamen systematischen Faktor sondern auch auf der idiosynkratischen Komponente basiert. Miu and Ozdemir [2006] gehen noch einen Schritt weiter. Deren Zwei-Faktor-Modell für den Ausfall und die Verlustrate erlaubt den Fall, dass der systematische Faktor der Verlustrate nicht vollkommen mit dem systematischen Faktor des Ausfalls übereinstimmen muss. Dieser Ansatz kann die Korrelationen zwischen Ausfall und Verlustrate in ihrer Gesamtheit flexibler erfassen und differenzieren. Die oben genannten Quellen lassen jedoch alle den dritten Risikoparameter, die Forderungshöhe zum Zeitpunkt des Ausfalls eines Schuldners, außen vor. Für Kreditlinien ist jedoch die Höhe der Forderungen bei Ausfall zufällig und muss geschätzt werden. Dies kann mittels Multiplikation eines Faktors, der sogenannten Relativen Inanspruchnahme bei Ausfall (RELI), mit dem gesamten zugesagten Betrag erreicht werden. Bisher gibt es relativ wenige empirische Studien zur Forderungshöhe bei Ausfall für Kreditlinien. Ausnahmen stellen dabei die Werke von Asarnow and Marker [1995], Araten and Jacobs [2001], Jiménez et al. [2009b] und Jacobs [2010] dar, welche sich mit der Forderungshöhe und deren Beziehung zur Kreditqualität auseinandersetzen. Es zeigt sich, dass die Relative Inanspruchnahme bei Verschlechterung der Kreditqualität deutlich ansteigt.

In dieser Arbeit wird der Modellierungsansatz des Ein-Faktor-Modells von Pykhtin [2003] und des Zwei-Faktor-Modells von Miu and Ozdemir [2006] in dem Sinne erweitert, dass auch der dritte Risikoparameter die Forderungshöhe bei Ausfall in Form der Relativen Inanspruchnahme bei Ausfall mitberücksichtigt wird. Des Weiteren wird eine detailliertere Betrachtung der Verlustrate durch eine Differenzierung in Verwertungserlösquote (VEQ) und Einbringungsquote (EBQ) verwendet, um eine Unterscheidung von besichertem und unbesichertem Exposure zu ermöglichen. Auf diese Weise werden nun in den Faktor-Modellen dieser Arbeit vier Risikoparameter erfasst: der Ausfall, die Relative Inanspruchnahme bei Ausfall, die Verwertungserlösquote und die Einbringungsquote. Ein Kritikpunkt an den beiden Faktor-Modellen ist die Annahme der multivariaten Normalverteilung der idiosynkratischen Faktoren. Die Störterme können beispielsweise in der Realität eine andere Abhängigkeitsstruktur aufweisen. In einem dritten Modell wird die Abhängigkeitsstruktur der Störterme mittels einer hierarchisch-archimedischen Copula spezifiziert. Hierarchisch-archimedische Copulae machen es möglich, asymmetrische Abhängigkeiten unter nicht austauschbaren Zufallsvariablen zu modellieren.

Für die verschiedenen Modelle werden zudem Schätzmethode n vorgestellt, welche die Parameter der einzelnen Größen simultan schätzen. Die Risikoparameter Relative Inanspruchnahme bei Ausfall, Verwertungserlösquote und Einbringungsquote sind in den erarbeiteten Modellen für alle Schuldner definiert, jedoch nur bei Ausfall beobachtbar. Heckman [1979] zeigt in seinem Selektionsmodell, dass getrennte Schätzungen für zwei Variablen unter Umständen zu verzerrten Schätzwerten führen können. Dies ist der Fall, wenn die beiden Variablen korreliert sind und eine der Variablen nur dann beobachtbar ist, wenn die andere bestimmte Bedingungen erfüllt. Das ist für die hier behandelten Risikoparameter gegeben, weil die empirische Studienlage Abhängigkeitsbeziehungen zwischen Ausfall und Verlustrate beziehungsweise Ausfall und Relative Inanspruchnahme aufzeigt. Diese Arbeit schlägt daher für die jeweiligen Modelle eine simultane Schätzung in Übereinstimmung mit Heckman [1979] vor. Für die Heckman-Schätzung des Copula-Modells wird auf das Selektionsmodell von Hasebe and Vijverberg [2012] zurückgegriffen. Diese haben den klassischen Heckman-Ansatz für den Fall verallgemeinert, dass die Abhängigkeitsstruktur der beiden Störterme durch eine bivariate Copulae festgelegt wird. In diesem Kontext ist anzubringen, dass bisherige Modelle mit getrennter Schätzung zu verzerrten Werten geführt haben und deren Ergebnisse daher mit Vorsicht zu behandeln sind. Eine Ausnahme stellt das Kreditportfoliomodell von Bade et al. [2011] dar, welches für den bivariaten Fall von Ausfall und Verlustrate eine simultane Schätzmethode verwendet. Zusammengefasst schaffen die Modelle dieser Arbeit eine ganzheitliche Betrachtung des Zusammenspiels der Risikoparameter Ausfall, Relative Inanspruchnahme bei Ausfall, Verwertungserlösquote und Einbringungsquote. Durch die simultanen Schätzmethode n in Anlehnung an Heckman [1979] wird ein Bias aufgrund endogener Selektion vermieden.

Der Rest der Arbeit ist wie folgt gegliedert: In “Risikoparameter Ausfall, Verlustrate und Forderungshöhe bei Ausfall” werden die genannten Zufallsvariablen genauer erläutert. Dabei wird auch auf die Relative Inanspruchnahme bei Ausfall, die Verwertungserlösquote und die Einbringungsquote eingegangen. Das zugrundeliegende Portfoliomodell CreditMetricsTM wird in Kapitel “Einführung in Credit MetricsTM” vorgestellt. Das Kapitel “Empirische Befunde zur Verlustrate und Forderungshöhe bei Ausfall und deren Beziehung zum Ausfall” befasst sich mit dem derzeitigen Literaturstand bezüglich Abhängigkeiten von Ausfall und Verlustrate beziehungsweise Forderungshöhe bei Ausfall. Das folgende Kapitel “Modellierung der Abhängigkeiten zwischen Ausfall, Verlustrate und Forderungshöhe bei Ausfall mit Faktoren” gibt eine kurze Einführung in die Theorie der Faktor-Modelle.

Zudem enthält es das Ein-Faktor-Modell und das Mehr-Faktor-Modell für die Risikoparameter Ausfall, Relative Inanspruchnahme bei Ausfall, Verwertungserlösquote und Einbringungsquote samt der entsprechenden, simultanen Schätzmethode nach Heckman. Das Copula-Modell wird in Kapitel “Modellierung der Abhängigkeiten zwischen Ausfall, Verlustrate und Forderungshöhe bei Ausfall mit Copulae” vorgestellt. Das Kapitel beginnt mit einem Überblick über die Theorie der Copulae. Im Anschluss wird das Copula-Modell samt der entsprechenden, simultanen Schätzmethode nach Heckman eingeführt. Da für dieses Modell eine hierarchisch-archimedische Copula gewählt wird, folgt zudem eine Einführung in archimedische und hierarchisch-archimedische Copulae. In dem Kapitel “Modellierung der Risikoparameter Relative Inanspruchnahme bei Ausfall, Verwertungserlösquote und Einbringungsquote” wird nochmals genauer auf den Umstand eingegangen, dass die Größen Relative Inanspruchnahme bei Ausfall, Verwertungserlösquote und Einbringungsquote in den erarbeiteten Modellen für alle Schuldner definiert, jedoch nur bei Ausfall beobachtbar sind. Dies weicht von der konventionellen Definition ab, orientiert sich jedoch an der Sichtweise der zugrunde gelegten Portfoliomodelle von Pykhtin [2003], Miu and Ozdemir [2006] und Bade et al. [2011]. Im Anschluss werden mögliche Randverteilungen auf $(0, 1)$ für diese Größen vorgestellt. Das Kapitel “Anwendung der Modelle auf CreditMetrics™” enthält eine numerische Analyse der vorgestellten Modelle. Diese baut auf einer transparenten Beschreibung der Eingangsparameter und der zugrundegelegten Annahmen auf. Danach werden die jeweiligen Simulationsalgorithmen der drei Modelle sowie eines Basismodells angegeben. Die Ergebnisse der numerischen Analyse werden im Anschluss diskutiert. Das letzte Kapitel fasst die wichtigsten Resultate zusammen.

2. Risikoparameter Ausfall, Verlustrate und Forderungshöhe bei Ausfall

Kreditrisiko bezeichnet das Risiko, dass sich der Wert eines Kreditportfolios wegen unerwarteter Veränderungen der Kreditqualität der Emittenten ändert [McNeil et al., 2005]. Man unterscheidet zwei Arten von Kreditrisiken: Ausfallrisiko und Bonitätsrisiko. Das Ausfallrisiko beschreibt die Gefahr, dass ein Kreditnehmer die vertraglich vereinbarten Zins- und Tilgungszahlungen nicht oder nur teilweise leistet. Zusätzlich besteht die Gefahr, dass durch eine Verschlechterung der Bonität des Kreditnehmers die Ausfallwahrscheinlichkeit steigt. Diese Ratingmigrationen führen insbesondere bei Wertpapieremittenten zu Wertschwankungen des Portfolios. Darunter versteht man das Bonitätsrisiko. Da das Kreditrisiko einen erheblichen Anteil am Gesamtbankrisiko ausmacht, ist das Management von Kreditrisiken, auch abseits der Vorschriften von Basel II beziehungsweise zukünftig Basel III, von Interesse für die Banken. Indem eine Bank ihre Kreditrisiken identifiziert, bewertet und transparent offenlegt, sichert sie ihre Wettbewerbsfähigkeit und fördert ihre Reputation am Markt. Für eine allgemeine Einführung in das quantitative Risikomanagement, insbesondere für Kreditrisiken und Kreditportfoliomodelle, werde auf [McNeil et al., 2005] verwiesen. Des Weiteren ist auch [Bluhm et al., 2010] zu nennen.

Die folgenden Notationen seien für die gesamte Arbeit gültig. Die Dimension einer reellen Zufallsvariablen $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P} \circ X^{-1})$ werde mit $d \in \mathbb{N}$ betitelt. Dabei ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ der zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum mit Grundmenge $\Omega \neq \{\}$, σ -Algebra \mathcal{A} und Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} auf \mathcal{A} . $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ steht für die Borel- σ -Algebra auf \mathbb{R}^d . (Zufalls-)Vektoren aus dem \mathbb{R}^d mit $d = 2, 3, \dots$ werden mit dick gedruckten Variablen dargestellt, univariate Zufallszahlen oder Skalare hingegen mit normaler Strichstärke. Für $i \in \{1, \dots, d\}$ werde mit X_i die Zufallsvariable gleich der i . Komponente aus $X = (X_1, \dots, X_d)$ bezeichnet. Analog gilt dies für die (multivariate) Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ sowie bei

Existenz für die Dichtefunktion $f : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ der Zufallsvariablen X mit Domain D . Die Quantilsfunktion einer univariaten Verteilung F ist definiert als $F^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u \mapsto \inf \{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq u\}$. Für stetige Verteilungen ist diese identisch mit der Inversen F^{-1} .

Man betrachte ein Portfolio $\mathcal{P} := \{1, \dots, N\}$ aus $N \in \mathbb{N}$ Geschäftspartnern $i = 1, \dots, N$. Dabei werde angenommen, dass das Portfolio auf Kreditnehmerebene aggregiert ist. Auf diese Weise ist es ausgeschlossen, dass zwei Positionen beziehungsweise Geschäfte desselben Schuldners existieren. Kreditrisikomodelle schreiben einem Kreditengagement folgende Größen zu: Das Ereignis des Ausfalls F_i eines Schuldners ist mit Unsicherheit behaftet und besitzt die Wahrscheinlichkeit $PD_i \in (0, 1)$. Die Ausfallwahrscheinlichkeit (Probability of Default) kann aus historischen Ausfällen der entsprechenden Ratingklasse geschätzt werden. Die Zufallsvariable $\mathbf{1}_{F_i} \sim \text{Bern}(PD_i)$ beschreibt, ob der Ausfall von i eintritt ($\mathbf{1}_{F_i} = 1$) oder nicht ($\mathbf{1}_{F_i} = 0$).

Fällt ein Kreditengagement aus, ergibt sich der Verlust aus der ausstehenden Forderung zum Zeitpunkt des Ausfalls $EAD_i \in (0, \infty)$ (Exposure at Default) und der Verlustrate $LGD_i \in (0, 1)$ (Loss given Default). Die Verlustrate entspricht dem prozentualen Anteil der Forderung, den die Bank bei Eintritt des Ausfallereignisses nicht mehr zurückerhält. Das beinhaltet sowohl die Verwertung von Sicherheiten als auch eine mögliche Insolvenzquote. Diese Größe kann erst nach Ausfall konkret bestimmt werden und wird daher zum Beispiel in Abhängigkeit von der Produkt- beziehungsweise Sicherheitenart aus historischen Ausfällen ermittelt. Anstelle der Verlustrate wird auch oft der Begriff Erholungsrate beziehungsweise Recovery Rate geführt. Diese berechnet sich als: $RR_i = 1 - LGD_i$. Der potentielle Verlust im Sinne der Erwartungswerte (Potential Loss) wird mit $PL_i = E[EAD_i] \cdot E[LGD_i]$ bezeichnet. Die Variablen der Forderungshöhe bei Ausfall und der Verlustrate sind stochastisch und werden in dieser Arbeit auch als solche behandelt. Der Verlust eines Schuldners ohne Berücksichtigung von Migrationsrisiken berechnet sich als:

$$L_i = EAD_i \cdot LGD_i \cdot \mathbf{1}_{F_i}.$$

In besonderem Interesse steht die Verteilung des Portfolioverlust L . Dieser ergibt sich als die Summe der Einzelverluste:

$$L := \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N EAD_i \cdot LGD_i \cdot \mathbf{1}_{F_i}.$$

Abbildung 2.0.1 stellt eine typische Dichtefunktion einer hypothetischen Verlustverteilung mit einigen Risikokennzahlen dar. Die stetige Verteilung

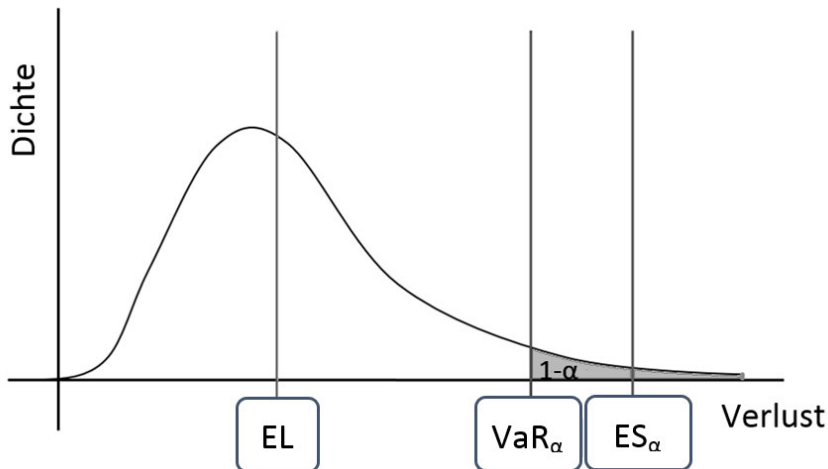


Abb. 2.0.1 Portfolioverlustverteilung mit Risikokennzahlen

suggeriert, dass Verluste aller Größenordnungen bis hin zu einer oberen Schranke möglich sind. Falls die Verlustrate oder die Forderungshöhe bei Ausfall eine stochastische Größe ist und eine stetige Verteilung besitzt, ist dies korrekt. Für eine deterministische Verlustrate und Forderungshöhe bei Ausfall ist dies bei großen Portfolios approximativ gültig. Die eingetragenen Kennzahlen sind: $EL := E[L]$ gibt den Erwarteten Verlust an. Im Fall von Unabhängigkeit der Risikoparameter vereinfacht sich der Ausdruck zu: $EL = \sum_{i=1}^N E[EAD_i] \cdot E[LGDi] \cdot E[\mathbf{1}_{F_i}]$. Des Weiteren gibt $VaR_\alpha := F_L^*(\alpha)$ für $\alpha \in (0, 1)$ das α -Quantil der Verlustverteilung an und wird mit Value at Risk zum Niveau α bezeichnet. Dabei steht F_L^* für die Quantilsfunktion der Verlustverteilung F_L und entspricht für stetige Verteilungen der Inversen F_L^{-1} der Verteilungsfunktion. Das eigentliche Kreditrisiko versteht man als die Abweichung des tatsächlichen Verlustes vom Erwarteten Verlust, weil der Erwartete Verlust bereits durch die Kreditkosten (insbesondere durch eine entsprechende Wahl der Zinsen) kompensiert wird. Um solche Verluste abzufangen, muss dieses Risiko mit ausreichend Eigenkapital hinterlegt werden. Das Ökonomische Kapital (Economic Capital) zum Niveau α berechnet sich als: $EC_\alpha := VaR_\alpha - EL$. Der Value at Risk ist in der Finanzwelt die gängigste Größe zur Quantifizierung des Risikos. Jedoch ist der Value at Risk nicht subadditiv und damit nicht kohärent [Bloom et al., 2010]. Ein kohärentes Risikomaß, das zusätzlich verwendet werden kann, ist der Expected Shortfall zum Niveau α :

$ES_\alpha := E[L|L \geq VaR_\alpha] + VaR_\alpha \cdot (1 - \alpha - \mathbb{P}(L \geq VaR_\alpha))$. Dieser setzt sich aus dem Erwarteten Verlust bei Überschreitung des VaR_α plus einem Korrekturterm für den Fall, dass F_L nicht stetig ist an der Stelle $F_L^{-1}(\alpha)$.

Eine Herausforderung des Kreditrisikomanagements ist die Rolle der Abhängigkeitsmodellierung. Das gemeinsame Auftreten von überdurchschnittlich vielen Ausfällen in einem gegebenen Portfolio stellt ein nicht zu vernachlässigendes Risiko dar. Die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Ausfällen der Kreditnehmer hat einen entscheidenden Einfluss auf die Verlustverteilung des Portfolios. Typischerweise führt eine stärkere Abhängigkeit bei der Verlustverteilung dazu, dass der Modus nach links rutscht und der rechte Rand schwerer wird. Solche Abhängigkeiten basieren auf zwei Gründen: Zum Einen werden verschiedene Unternehmen durch gemeinsame makroökonomische Faktoren beeinflusst, zum Anderen können direkte Geschäftsbeziehungen unter diesen existieren. Für große Portfolios wird angenommen, dass letztgenannte Risiken vernachlässigbar sind. Die Abhängigkeit aufgrund gemeinsamer Faktoren ist jedoch von großer Bedeutung. Neben dem Ausfall der Schuldner sind auch die anderen beiden Variablen, die Verlustrate und die Forderungshöhe bei Ausfall entscheidend. Werden diese in Kreditportfoliomodellen aus Gründen der Vereinfachung als deterministisch angenommen, wird der Einfluss dieser Größen sowohl im Einzelnen, als auch deren Beziehung untereinander und zur Ausfallwahrscheinlichkeit vernachlässigt. Beispielsweise ist es vorstellbar, dass sich im Zuge eines konjunkturellen Abschwungs sowohl die Kreditwürdigkeit eines Schuldners, als auch der Wert der Sicherheiten negativ entwickeln. Ein empirischer Überblick über die Beziehung von Verlustrate und Ausfall beziehungsweise Forderungshöhe bei Ausfall und Ausfall in Kapitel 4 bestätigt die Notwendigkeit, diese Größen und deren Beziehungen in die Modellierung miteinzubeziehen.

2.1 Die Forderungshöhe bei Ausfall

Die Höhe der Forderungen zum Zeitpunkt des Ausfalls eines Schuldners wird auch mit Exposure at Default EAD bezeichnet. Für bilanzielle Forderungen, zum Beispiel Darlehen, entspricht dies dem aktuell in Anspruch genommenen Kreditbetrag. Außerbilanzielle Geschäfte, zum Beispiel Kreditlinien, bestehen aus zwei Teilen, der Inanspruchnahme (bilanziell) und der freien Linie (außerbilanziell) [Taplin et al., 2007, BCBS, 2006]. Hierbei wird nicht zu Vertragsbeginn der Forderungsbetrag vereinbart, sondern